CARISTIの不動点定理の拡張定理の別証明 (非線形解析学と凸解析学の研究)

鈴木, 智成

数理解析研究所講究録 1415 巻 2005 年 146-151

CARISTI の不動点定理の拡張定理の別証明

九州工業大学・工学部　鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

1. CARISTI の不動点定理

以下の定理は 2 つの名前を持つ.「Caristi の不動点定理」と呼ばれることが多いが,「Caristi & Kirk の不動点定理」と呼ばれることもある.

定理 1 (Caristi [4], Caristi & Kirk [5]). (X,d) を完備距離空間とし, T を X 上の写像とし, f を X から $[0,\infty)$ への下半連続関数とする. すべての $x\in X$ について,

$$d(x,Tx)\leq f(x)-f(Tx)$$

を満たすと仮定する. このとき, T は不動点を持つ.

この定理において, 不動点は唯一とは限らない. 実際, $f=0$ とし, T を恒等写像とすれば, すべての点が T の不動点となる.

また, 定理 1 は Banach の縮小原理 [3] の一般化である. 実際, 以下のように, 定理 1 から Banach の縮小原理を簡単に導くことができる.

定理 2 (Banach [3]). (X,d) を完備距離空間とし, T を X 上の写像する. $r\in[0,1)$ が存在して, すべての $x,y\in X$ について

$$d(Tx,Ty)\leq r\,d(x,y)$$

を満たすとする. このとき, T は不動点を唯一つ持つ.

証明. X から $[0,\infty)$ への連続関数 f を

$$f(x)=\frac{1}{1-r}d(x,Tx)$$

と定義する. このとき, すべての $x\in X$ について

$$\begin{aligned}d(x,Tx)&=\frac{1}{1-r}d(x,Tx)-\frac{r}{1-r}d(x,Tx)\\&\leq\frac{1}{1-r}d(x,Tx)-\frac{1}{1-r}d(Tx,T^2x)\\&=f(x)-f(Tx).\end{aligned}$$

が成立する. よって, Caristi の不動点定理 (定理 1) より, T は不動点を持つ. 次に, $x,y\in X$ を T の不動点とすると,

$$d(x,y)=d(Tx,Ty)\leq r\,d(x,y)$$

住所. 〒 804-8550 北九州市戸畑区仙水町 1 − 1 九州工業大学工学部数学教室
電子メール. suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp
キーワード. Caristi の不動点定理, Banach の縮小原理, 距離完備性.

となる. もし $x \neq y$ とすると, $1 \leq r$ となり, $r \in [0,1)$ に矛盾する. よって, 不動点は唯一である. □

定理 1 の結論と距離完備性は同値であることが知られている.

定理 3 (Weston [12]). (X,d) を距離空間とする. このとき, 以下は同値である.

(1) X は完備である;

(2) 「すべての $x \in X$ について,

$$d(x,Tx) \leq f(x) - f(Tx)$$

を満たす X から $[0,\infty)$ への下半連続関数 f が存在する」という条件を満たすすべての X 上の写像 T が不動点を持つ.

筆者は, 定理 1 は完備距離空間上の不動点定理の中で最も重要な定理の 1 つであると考える. というのも, この定理は応用上重要な Ekeland の ε 変分原理 [7, 8] の変形である. また, 定理 3 のように, この定理の結論と距離完備性は同値である. つまり, 理論上も重要な定理となっている. そのため, 定理 1 は種々の拡張定理を持っている.

本稿では, 4 つの拡張定理に関して非常に簡潔な証明を与える. しかも, その証明では, 定理 1 のみを用いている. 定理 1 のみを用いて, 定理 1 の拡張定理を証明するのであるから, これらの拡張定理は「証明」という観点から見ると非常につまらない定理となるかもしれない. しかし, 筆者はそのようには考えていない. 数学の定理の価値は様々な観点から評価されるべきであり, これら 4 つの拡張定理は Caristi の不動点定理の興味深いヴァリエーションとして, 非常に価値があると考えている.

本稿は参考文献 [10, 11] の結果の簡略版であるが, 通常の論文とは異なり, 筆者の感覚的なコメントも記述している.

2. Downing & Kirk の定理

Downing と Kirk は以下の拡張定理を証明した.

定理 4 (Downing & Kirk [6]). (X,d_X) と (Y,d_Y) を完備距離空間とし, T を X 上の写像とする. すべての $x \in X$ に対して,

$$\max\left\{d_X(x,Tx),\ c\, d_Y(\varphi x, \varphi \circ Tx)\right\} \leq f(\varphi x) - f(\varphi \circ Tx)$$

を満たす X から Y への閉写像 φ (グラフが $X \times Y$ の閉集合), $\varphi(X)$ から $[0,\infty)$ への下半連続関数 f および定数 $c > 0$ が存在すると仮定する. このとき, T は不動点を持つ.

$X = Y$, $d_X = d_Y$, $c = 1$ とし, そして φ を恒等写像とすると, 定理 4 は定理 1 となる.

Downing と Kirk はこの定理を直接証明している. そのため, 筆者は, この定理における「φ の閉性」の役割がよく分からなかった. 強すぎる条件なのか, それとも適度な条件なのか.

証明 ([10]). 距離関数の正数倍は距離関数であり, 完備の性質も変わらないので, $c = 1$ としても一般性を失わない. φ グラフを

$$Z = \mathrm{Gr}(\varphi) = \left\{(x,\varphi x) : x \in X\right\} \subset X \times Y$$

と置く. φ は閉写像であるから, Z は閉集合, すなわち完備である. Z 上の距離を

$$d_Z\big((x,\varphi x),(y,\varphi y)\big) = \max\big\{d_X(x,y), d_Y(\varphi x,\varphi y)\big\}$$

で定義する. Z 上の写像 U および Z から $[0,\infty)$ への下半連続関数 g を

$$U(x,\varphi x) = (Tx, \varphi\circ Tx), \quad g(x,\varphi x) = f(\varphi x)$$

と定義する. このとき, 定理の仮定は「すべての $x \in X$ について

$$d_Z\big((x,\varphi x), U(x,\varphi x)\big) \le g(x,\varphi x) - g\big(U(x,\varphi x)\big)$$

が成立する」と表現できる. これは Caristi の不動点定理の仮定と同じ形であるから, U は不動点 $(x_0, \varphi x_0) \in Z$ を持つ. U の定義より $x_0 \in X$ は $Tx_0 = x_0$ を満たす. すなわち, T は不動点を持つ. □

さて, 「φ の閉性」に関する考察であるが,

- 「φ の閉性」は Z の完備性に直結している;
- Caristi の不動点定理は距離完備性と関係がある (定理 3);
- f, T から自然に g, U を定義している.

の3点をふまえ, 「φ の閉性」という条件は適度な条件であると筆者は判断している.

3. Bae らによる拡張定理

この節では, Bae [1] と Bae, Cho, Yeom [2] で証明されている拡張定理の別証明を与える. そのための準備として, 以下の定理を証明する.

定理 5 (Suzuki [11]). (X,d) を完備距離空間, T を X 上の写像, f を X から $[0,\infty)$ への下半連続関数, α を X から $[0,\infty)$ への関数, そして $\eta > 0$ とする.

$$d(x,Tx) \le \alpha(x)\Big(f(x) - f(Tx)\Big) \tag{1}$$

がすべての $x \in X$ について成立すること, および

$$\sup\Big\{\alpha(x) : f(x) \le \inf f(X) + \eta\Big\} < \infty \tag{2}$$

を仮定する. このとき, T は不動点を持つ.

α を恒等的に 1 となる関数とすると, 条件 (2) は自動的に成立するので, この定理は Caristi の定理になる. したがって, この定理は Caristi の定理の拡張定理である.

証明. $\alpha(x) > 0$ の場合, 条件 (1) より $f(Tx) \le f(x)$ が言える. また, $\alpha(x) = 0$ の場合, 再び条件 (1) より $Tx = x$ が言える. つまり, $f(Tx) = f(x)$ である. したがって, $f(Tx) \le f(x)$ がすべての $x \in X$ で成立する.

$$Y = \Big\{x \in X : f(x) \le \inf f(X) + \eta\Big\},$$
$$\gamma = \sup \alpha(Y) < \infty$$

と置くと, 明らかに Y は空集合ではなく, そして f の下半連続性から完備である. また, 上記の考察から $TY \subset Y$ であることも分かる. すべての Y の元 x について,

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\le \alpha(x)\,\big(f(x) - f(Tx)\big) \\ &\le \gamma\,\big(f(x) - f(Tx)\big) \\ &= \gamma f(x) - \gamma f(Tx) \end{aligned}$$

が言えるが, $x \mapsto \gamma f(x)$ が下半連続であることに注意すると, $(Y, T, \gamma f)$ は Caristi の不動点定理の仮定を満たしている. 従って, T は不動点 $x_0 \in Y \subset X$ を持つ. □

「この定理は Caristi の定理の拡張定理である」と先ほど述べたが, 上の非常に簡潔な証明から分かる通り, 「この定理は Caristi の定理の 1 つの形態である」という方が正確であろう.

さて, この定理 — 実質的に Caristi の不動点定理 — を用いて [1, 2] の結果に対する別証明を与えよう.

定理 6 (Bae, Cho & Yeom [2]). (X, d) を完備距離空間, T を X 上の写像, f を X から $[0, \infty)$ への下半連続関数, c を $[0, \infty)$ から $[0, \infty)$ への関数で右から上半連続な関数とする. すべての $x \in X$ について,

$$d(x, Tx) \le \max\left\{c\big(f(x)\big), c\big(f(Tx)\big)\right\}\,\big(f(x) - f(Tx)\big)$$

を満たすと仮定する. このとき, T は不動点を持つ.

c を恒等的に 1 となる関数とすると, この定理は Caristi の定理になる. したがって, この定理は Caristi の定理の拡張定理である.

証明 ([11]). X から $[0, \infty)$ への関数 α を

$$\alpha(x) = \max\left\{c\big(f(x)\big), c\big(f(Tx)\big)\right\}$$

と定義する. $t_0 = \inf f(X)$ と置き, $\gamma > c(t_0)$ を固定する. このとき, c の右からの上半連続性より, すべての $t \in [t_0, t_0 + \eta]$ に対して $c(t) \le \gamma$ を満たす $\eta > 0$ が存在する.

$$\begin{aligned} Y &= \Big\{x \in X : f(x) \le t_0 + \eta\Big\} \\ &= \Big\{x \in X : f(x) \in [t_0, t_0 + \eta]\Big\} \end{aligned}$$

と置くと, 定理 5 での考察により, $TY \subset Y$ である. よって, $\alpha(x) \le \gamma$ がすべての $x \in Y$ で成立する. 従って,

$$\sup \alpha(Y) \le \gamma < \infty$$

である. 定理 5 から, T は不動点を持つ. □

次の定理も c を恒等的に 1 となる関数とすると, Caristi の定理になる.

定理 7 (Bae [1]). (X, d) を完備距離空間, T を X 上の写像, f を X から $[0, \infty)$ への下半連続関数, c を $[0, \infty)$ から $[0, \infty)$ への非減少関数とする. すべての $x \in X$ について,

$$d(x, Tx) \leq c\big(f(x)\big)\ \big(f(x) - f(Tx)\big)$$

を満たすと仮定する. このとき, T は不動点を持つ.

証明 ([11]). X から $[0, \infty)$ への関数 α を

$$\alpha(x) = c\big(f(x)\big)$$

と定義する. このとき,

$$\begin{aligned}
&\sup\Big\{\alpha(x) : f(x) \leq \inf f(X) + 1\Big\} \\
&\leq c\Big(\inf f(X) + 1\Big) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

が成立する. よって, 定理 5 から, T は不動点を持つ. □

次の拡張定理も, c を恒等的に 1 となる関数とすると, Caristi の定理になる. なぜなら, このとき (3) の 2 番目の条件から最初の条件が成立する.

定理 8 (Bae [1]). (X, d) を完備距離空間, T を X 上の写像, f を X から $[0, \infty)$ への下半連続関数, c を $[0, \infty)$ から $[0, \infty)$ への上半連続関数とする. すべての $x \in X$ について,

(3) $\quad d(x, Tx) \leq f(x) \quad$ と $\quad d(x, Tx) \leq c\big(d(x, Tx)\big)\ \big(f(x) - f(Tx)\big)$

を満たすと仮定する. このとき, T は不動点を持つ.

証明 ([11]). X から $[0, \infty)$ への関数 α を

$$\alpha(x) = c\big(d(x, Tx)\big)$$

と定義する.

$$Y = \Big\{x \in X : f(x) \leq \inf f(X) + 1\Big\}$$

と置く. このとき, すべての Y の元 x に対して,

$$\begin{aligned}
\alpha(x) &\leq \max\{c(t) : 0 \leq t \leq d(x, Tx)\} \\
&\leq \max\{c(t) : 0 \leq t \leq f(x)\} \\
&\leq \max\{c(t) : 0 \leq t \leq \inf f(X) + 1\}
\end{aligned}$$

が成立する. c の上半連続性から, sup が max となることに注意する. 右辺が x と無関係なことから,

$$\sup \alpha(Y) \leq \max\{c(t) : 0 \leq t \leq \inf f(X) + 1\} < \infty$$

が言える. よって, 定理 5 から, T は不動点を持つ. □

4. 最後に

文献 [10, 11] では別証明だけでなく, τ-distance という概念を用いて, 定理 4 – 8 をさらに一般化している. この一般化定理は Caristi の定理から直接証明することはできないが, τ-distance 版の Caristi の定理から簡単に証明できる.

最後に, τ-distance 版の Caristi の定理 — これも 1 つの拡張定理である — を記述して, この稿を終えたい.

定理 9 ([9]). X を完備距離空間, p を X 上の τ-distance, T を X 上の写像, f を X から $[0,\infty)$ への下半連続関数とする. すべての $x \in X$ について,

$$p(x, Tx) \leq f(x) - f(Tx)$$

を満たすと仮定する. このとき, T は不動点を持つ.

参考文献

[1] J. S. Bae, *"Fixed point theorems for weakly contractive multivalued maps"*, J. Math. Anal. Appl., **284** (2003), 690–697.

[2] J. S. Bae, E. W. Cho and S. H. Yeom, *"A generalization of the Caristi-Kirk fixed point theorem and its applications to mapping theorems"*, J. Korean Math. Soc., **31** (1994), 29–48.

[3] S. Banach, *"Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales"*, Fund. Math., **3** (1922), 133–181.

[4] J. Caristi, *"Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions"*, Trans. Amer. Math. Soc., **215** (1976), 241–251.

[5] J. Caristi and W. A. Kirk, *"Geometric fixed point theory and inwardness conditions"*, Lecture Notes in Math., Vol. 490, pp. 74–83, Springer, Berlin, 1975.

[6] D. Downing and W. A. Kirk, *"A generalization of Caristi's theorem with applications to nonlinear mapping theory"*, Pacific J. Math., **69** (1977), 339–346.

[7] I. Ekeland, *"On the variational principle"*, J. Math. Anal. Appl., **47** (1974), 324–353.

[8] I. Ekeland, *"Nonconvex minimization problems"*, Bull. Amer. Math. Soc., **1** (1979), 443–474.

[9] T. Suzuki, *"Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces"*, J. Math. Anal. Appl., **253** (2001), 440–458.

[10] T. Suzuki, *"On Downing-Kirk's theorem"*, J. Math. Anal. Appl., **286** (2003), 453–458.

[11] T. Suzuki, *"Generalized Caristi's fixed point theorems by Bae and others"*, to appear in J. Math. Anal. Appl.

[12] J. D. Weston, *"A characterization of metric completeness"*, Proc. Amer. Math. Soc., **64** (1977), 186–188.